per pensar d'un minut a una hora

Jordi Deulofeu
Departament de Didàctica de les Matemàtiques
i les Ciències
Universitat Autònoma de Barcelona
jordi.deulofeu@uab.cat

Dedicaré l'article d'avui a la que segurament és la successió més coneguda de les matemàtiques, l'anomenada successió de Fibonacci. Leonardo de Pisa, que va viure a cavall dels segles XII i XIII, és, sens dubte, el matemàtic més rellevant de l'època medieval a Occident. La seva obra més destacada és *el Liber Abaci* (1202), nom que representa una certa contradicció, ja que a l'inici d'aquest extens treball de més de sis-centes pàgines Leonardo introdueix els nombres hindús i ens ensenya a operar-hi, mostrant que amb aquests algorismes és possible alliberar-se de l'ús dels àbacs, fins llavors instruments indispensables per a la realització de qualsevol tipus de càlculs.

El nom de Fibonacci el va escriure per primera vegada l'historiador francès Guillaume Libri, el 1838, i pocs anys després, a la dècada de 1870, el matemàtic Edouard Lucas (1842 - 1891) va anomenar la successió que resol el famós problema de la reproducció de conills, i que comença amb els nombres: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34... com la successió de Fibonacci, i els nombres que la formen com a nombres de Fibonacci. Lucas mateix va estudiar àmpliament la successió i va fer-ne la generalització, és a dir, en lloc de considerar la successió que comença per 1, 1, va suposar que els dos primers termes eren dos enters qualssevol a i b, tot mantenint la mateixa llei de formació: cada terme és suma dels dos anteriors. Per això, la successió que comença amb 1, 3, 4, 7, 11, 18... s'anomena successió de Lucas.

► **Problema 1.** Una qüestió ben senzilla, després d'identificar la llei recurrent de formació de la successió, que poden descobrir, analitzar i discutir els alumnes de primària, consisteix a determinar el patró que formen els nombres de la successió de Fibonacci pel que fa a la paritat. Si observem els primers termes, sembla clar: senar, senar, parell, senar, senar, parell... i això és així pel fet que els dos primers termes són senars. Què passa en els altres casos, és a dir, quan un terme és parell i l'altre senar, o bé quan els dos termes són parells? Descobrir primer i argumentar després la validesa dels patrons trobats és una bona manera de començar a conèixer aquesta successió, les propietats de la qual semblen no tenir fi.

Patrons similars es poden trobar per a qualsevol altre nombre primer que formi part de la successió. Per exemple, si observem els nombres de la successió pel que fa al 3 i als seus múltiples, veurem que el 3 és el quart terme i que totes les posicions múltiples de 4 estan ocupades per múltiples de tres. Passa el mateix per al 5? I per al 13? Formulem una conjectura plausible relacionada amb aquesta curiosa regularitat.

► **Problema 2.** A partir de la recurrència definida per la suma de dos termes consecutius, podem plantejar-nos què passa si sumem els tres primers termes, els quatre primers, els cinc primers, i en general els *n* primers termes. Quina conjectura es pot formular? Què passa si sumem els *n* primers termes parells? I els *n* primers termes senars?

En relació amb la divisibilitat, hi ha també nombroses propietats interessants.

► **Problema 3.** És possible que dos termes consecutius de la successió de Fibonacci tinguin algun divisor comú, llevat de l'1? Per què?

En relació amb els nombres primers, de les propietats anteriors es dedueix que si un nombre és primer i forma part de la successió, ha d'ocupar un lloc que també correspon a un nombre primer. No obstant això, el recíproc no és cert; un primer contraexemple el trobem a: a 19 = 4.181 = 113 · 37. Això ens porta a preguntar-nos si hi ha infinits nombres primers que són nombres de Fibonacci. Encara que tot sembla indicar que si, la resposta definitiva a aquesta pregunta segueix oberta.

Observem ara les propietats que tenen relació amb sumes i diferències de quadrats. Per exemple, la suma dels quadrats de dos termes consecutius de la successió és també un terme de la successió, i és precisament el terme que ocupa el lloc corresponent a la suma dels llocs ocupats pels dos termes. Per exemple, prenem els termes consecutius cinquè i sisè, que són 5 i 8. Resulta: 25 + 64 = 89, que és el terme onzè.

Si en lloc de sumar els quadrats de dos nombres consecutius sumem els quadrats de dos nombres de la successió deixant un lloc entre ells, el resultat és el doble d'un nombre de Fibonacci, concretament:

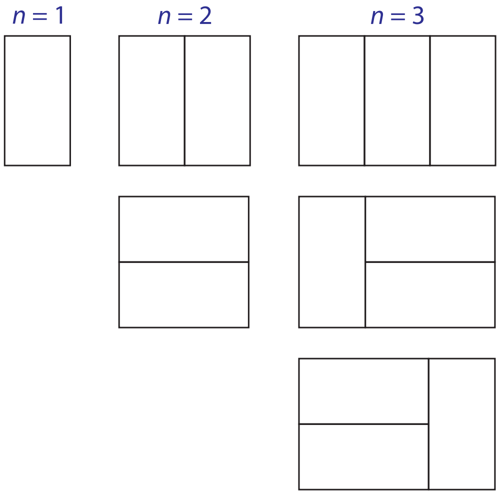
$$a_n^2 + a_{n+2}^2 + = 2a_{2n+1}$$

► **Problema 4.** Possiblement una de les propietats més interessants és la que permet relacionar el quadrat d'un terme amb el producte del terme anterior pel posterior. Sabríeu conjecturar-la?

Aquesta igualtat, enunciada pel matemàtic francès Albert Girard (1595-1632) i la demostració de la qual pot fer-se per inducció, va ser la que va permetre construir, justificar i resoldre, al segle XVIII, la curiosa i coneguda paradoxa d'Hooper, segons la qual amb un puzle construït *ad hoc* es «demostra» que 64 = 65 i amb la qual s'inauguren les paradoxes *de la unitat desapareguda* que després plantejarà Sam Loyd, entre d'altres. Cal observar que la propietat descoberta per Girard ens diu, per exemple, que: $5^2 = 3 \cdot 8 + 1$, mentre que per al següent terme, $8^2 = 5 \cdot 13 - 1$; en el següent tindrem, $13^2 = 8 \cdot 21 + 1$, i així successivament, sumant o restant una unitat alternativament.

Acabarem amb un altre problema, en aquest cas de tipus geomètric, que tot i la diferència amb els anteriors manté una estreta relació amb la successió de Fibonacci.

▶ **Problema 5.** Disposem de les fitxes d'un joc de dòmino, que són rectangles d'amplada 1 u. i llargada 2 u., i volem formar amb elles un rectangle d'amplada 2 i de llargada un nombre natural n. Conegut n, ¿de quantes maneres diferents podrem formar aquest rectangle? Un estudi dels primers casos ens permetrà conjecturar que el nombre de possibilitats és 1 per a $n = 1$, 2 per a $n = 2$, 3 per a $n = 3$ i 5 per a $n = 4$ (vegeu el dibuix amb els tres primers casos).



Imatge 1. Els tres primers casos.

Una de les preguntes que ens podem fer sobre la successió de Fibonacci és el seu tipus de creixement. És més gran que el d'una progressió aritmètica (en la qual cada terme és suma de l'anterior més una quantitat fixa), ja que la mateixa regla de formació ens indica que a mesura que augmenten els termes la quantitat que sumem a un d'ells per obtenir el següent és cada vegada més gran. Llavors podem preguntar-nos si aquest creixement serà similar al d'una progressió geomètrica (ara cada terme és l'anterior per una quantitat fixa), i en cas que fos així, quina seria aquesta quantitat.

Si fem l'estudi dels quocients que s'obtenen en dividir cada terme pel seu anterior, observem que aquests no són iguals, però sí que tendeixen a estabilitzar-se, tot i que la successió dels quocients no és monòtona, sinó alternada.

En efecte, si disposem aquests quocients en una taula formant dues successions de manera alternada (taula que val la pena construir), constatarem que la primera de les successions (la formada pels quocients de dividir els successius termes parells pel seu anterior) és creixent, mentre que la segona (formada per els quocients de dividir cada terme imparell pel seu anterior) és decreixent i, a més, tots els termes de la segona són més grans que els de la primera.

Llavors resulta que el límit de les dues successions és el mateix, i aquest nombre és $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, nombre irracional conegut com el nombre d'or. D'aquesta manera, els nombres de Fibonacci ens proporcionen aproximacions tan bones com vulguem del nombre d'or, tant per defecte com per excés; n'hi ha prou amb fer el quocient de dos termes consecutius de la successió. Si prenem un terme parell i el dividim pel seu anterior, l'aproximació serà per defecte, i en cas contrari serà per excés.

Aquest resultat va ser establert l'any 1753 pel matemàtic escocès Robert Simpson i és fonamental per comprendre el creixement de la successió i per trobar una expressió no recurrent que permeti determinar un terme de la successió sense necessitat de calcular els anteriors.

En efecte, suposant que el límit anterior existeix, i anomenant x aquest límit, una senzilla manipulació algebraica que resulta d'aplicar la recurrència que determina la successió ens permet obtenir l'equació $x = 1 - x^2$, que té per solució $(1 + \sqrt{5})/2$. En conseqüència, el límit dels quocients dels successius termes, quan el nombre de termes és infinit, és igual al nombre Φ.

Si us ha interessat la successió de Fibonacci i en voleu saber més coses, la seva relació amb el nombre d'or i, en general, sobre l'obra de Leonardo de Pisa, us proposo la lectura de tres llibres: un de Ricardo Moreno, de la col·lecció «La matemática en sus personajes»; un altre molt recent de Keith Devlin, i el tercer, de Fernando Corbalán; els trobareu a la bibliografia. D'aquí a uns mesos, a la col·lecció «Grandes matemáticos» de l'editorial RBA, encara en sortirà un altre que estic escrivint ara mateix sobre aquest interessant personatge i la seva obra, que tanta importància va tenir per a l'esdevenir de la matemàtica occidental.

Bibliografia

Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea, el lenguaje matemático de la belleza*. Col·lecció «El mundo es matemático». Barcelona: RBA.

Devlin, K. (2017). *Finding Fibonacci.* Princeton (NJ): Princeton University Press.

Moreno, R. (2007). *Fibonacci, el primer matemático medieval.* Madrid: Nivola.